摘　要

本文只能算这个礼拜的读书笔记, 有关插值问题我仍然有很多困惑的地方, 本文只记录已经搞懂的部分, 很不幸octave并没有完整的二维插值解决方案, matlab的相关源码我也看了一点, 和想像中的有很多不同, 为此我准备自己动手写一个, 一来为了建模, 一来也算是对octave社区的贡献, 由于软件开发比较复杂, 目前进展很不顺利, 但这些问题会克服的, 具体程序目前没办法呈上.

本次联系之所以做得很不顺利, 在于我还打算搞清曲面造型方面的有关问题, 下面的笔记中包括一些曲面造型的问题, 也是对去年刘根宏老师的公选课“图形学中的数学基础” 的一点回忆和加深.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{0.1}$$

$$P_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{0.2}$$

1 插值问题概述[1]

设函数$y = f(x)$ 在区间$[a, b]$ 上连续, 且在$n + 1$ 个不同的点$a \leqslant x_0, x_1, \ldots, x_n \leqslant b$ 上分别取值$y_0, y_1, \ldots, y_n$

插值的目的就是要在一个性质优良, 便于计算的函数类Φ 中, 求一简单函数$P(x)$, 使

$$P(x_i) = y_i (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

而在其他点$x \neq x_i$ 上, 作为$f(x)$ 的近似.

称区间$[a, b]$为插值区间, 称点$x_0, x_1, \ldots, x_n$为插值节点, 称(1.1) 为插值条件, 称函数类Φ为插值函数类.

当选用代数多项式作为插值函数是, 相应的插值问题就称为多项式插值. 最基本的问题是: 求一次数不超过n的代数多项式

2 多项式插值的唯一性

由插值条件(0.2)知, 插值多项式$P_n(x)$的系数$a_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ 满足线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

由Vandermonde 行列式, 知

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \tag{2.2}$$

因$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是区间$[a, b]$ 上, 所以$V \neq 0$, 方程组(2.1) 有唯一解.

3 拉格朗日插值

选取插值基函数

$$
\begin{aligned}
l_x(x) &= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\
&= \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i=0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

于是插值多项式为

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x) \tag{3.2}$$

令$n=1$ 得两点插值公式

$$
\begin{aligned}
L_1(x) &= y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\
&= y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

令$n=2$ 可得三点插值, 即二次插值函数

4 牛顿插值法

令数域F上不高于n次的多项式全体为G, 他是F上的$n+1$维线性空间, 可以取

$$n_k = \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_k) \quad k=1,2,\ldots,n \tag{4.1}$$

令$n_0=1$ 于是$\{n_k\}$ 组成G 的一组基, 现求

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k n_k(x) \tag{4.2}$$

满足(1.1) 只须确定系数$\{a_k\}$.

显然$x=x_0$ 代入(4.2) 可得

$$a_0 = y_0 \tag{4.3}$$

一般得

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \tag{4.4}$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{4.5}$$

5 多项式插值余项估计

记

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{5.1}$$

则$R_n(x)$ 就是用$P_n(x)$近似代替$f(x)$时的阶段误差, 称为插值多项式$P_n(x)$ 的余项

设$f(x)$在区间$[a,b]$ 上有直到$n+1$ 阶导数, $P_n(x)$ 为满足条件(1.1) 的n 次插值多项式由于$f(x)-P_n(x)$ 在$[a,b]$上有$\{x_n\}$这$n+1$个零点, 所以可设

$$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x) \tag{5.2}$$

$$\omega_{n+1}=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{5.3}$$

$$\tag{5.4}$$

对区间$[a,b]$上异于x_i的点x, 令

$$F(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(x) \tag{5.5}$$

则F 在$[a,b]$ 上至少有$n+2$个互异的零点, 且F 有直到$n+1$阶的导数

$$F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K(x)(n+1)! \tag{5.6}$$

$F^{(n+1)}$ 在$[a,b]$至少上有一个零点ξ 于是

$$0=F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-K(x)(n+1)! \tag{5.7}$$

所以

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{5.8}$$

牛顿插值法的余项

$$R_n(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\,\omega_{n+1}(x) \tag{5.9}$$

6 三次样条曲线

以一较一般化的方式建立三次样条曲线的形式, (想法来自刘根洪《微分几何与计算几何》, 但笔记和书都放在学校里了, 只能根据已有知识反推.)

现有$\mathbb{R}^s$ 上点列$\{P_i\}(i=1,\ldots,n)$, 求曲线族P_i 使P_i 为t 的三次形式, 且在$\{P_n\}$各点上连续, 且直到二阶导数也连续,

$$P_i(t)=A_i+B_it+C_it^2+D_it^3 \tag{6.1}$$

$$t\in[0,1],A_i,B_i,C_i,D_i\in\mathbb{R}^s \tag{6.2}$$

$$P_{i-1}(1)=P_i(0)=P_i \tag{6.3}$$

$$P'_{i-1}(1)=P'_i(0) \tag{6.4}$$

$$P''_{i-1}(1)=P''_i(0) \tag{6.5}$$

$$i=1,2,\ldots,n \tag{6.6}$$

$$\tag{6.7}$$

下面试解这组方程, 考虑到在各点二阶导数连续, 且二阶导数比是一次形式, 所以可令:

$$P_i''(t) = M_{i-1}(1-t) + M_i t, \qquad t \in [0,1] \tag{6.8}$$

其中$M_i = P_i''$,

对上述方程积分, 得

$$P_i'(t) = -\frac{1}{2}M_{i-1}(1-t)^2 + \frac{1}{2}M_i t^2 + A_i \tag{6.9}$$

$$P_i(t) = \frac{1}{6}M_{i-1}(1-t)^3 + \frac{1}{6}M_i t^2 + A_i t + B_i \tag{6.10}$$

$$\tag{6.11}$$

A_i, B_i 为积分常数, 由曲线的连续性, 即(6.3) , 得

$$A_i = P_i - P_{i-1} - \frac{1}{6}(M_i - M_{i-1}) \tag{6.12}$$

$$B_i = P_{i-1} - \frac{1}{6}M_{i-1} \tag{6.13}$$

$$\tag{6.14}$$

将以上式子代入(6.9) , 并利用一阶导数连续, 即(6.4),

得:

$$\frac{1}{2}M_{i+1} + 2M_i + \frac{1}{2}M_{i-1} = 3(P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}) \triangleq g_i \tag{6.15}$$

为确定M_i , 还须两个方程, 即边界条件, 在端点P_0, P_n 上的性质, 这些条件有不同的取法,

6.1 给出端点一阶导数

给出端点的一阶导数, 即P_0', P_n' 已知, 于是有

$$P_0' = P_1'(0) = -\frac{M_0}{2} + P_1 - P_0 - \frac{1}{6}(M_1 - M_0) \tag{6.16}$$

$$P_n' = P_n'(1) = \frac{M_n}{2} + P_n - P_{n-1} - \frac{1}{6}(M_n - M_{n-1}) \tag{6.17}$$

$$\tag{6.18}$$

解得

$$2M_0 + M_1 = 6(P_1 - P_0 - P_0') \triangleq g_0 \tag{6.19}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = 6[P_n' - (P_n - P_{n-1})] \triangleq g_n \tag{6.20}$$

$$\tag{6.21}$$

于是得方程组:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

由此确定所有参量,

6.2 给出端点上二阶导数

给出端点是二阶导数, 即P_0'', P_n''已知, 若$P_0'' = P_n'' = 0$ 则称自然边界条件, 代入(6.8) 得

$$M_0 = P_0'' \tag{6.23}$$

$$M_n = P_n'' \tag{6.24}$$

$$\tag{6.25}$$

于是

$$2M_1 + M_2 = g_1 - \frac{1}{2}P_0'' \tag{6.26}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = g_{n-1} - \frac{1}{2}P_n'' \tag{6.27}$$

$$\tag{6.28}$$

得方程组:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 - \frac{1}{2}P_0'' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \frac{1}{2}P_n'' \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

6.3 周期函数

周期条件即曲线在空间中呈周期性, 有$M_0 = P_0'' = P_n'' = M_n$ 代入(6.8) 得:

$$-\frac{1}{2}M_0 + P_1 - P_0 - \frac{1}{6}(M_1 - M_0) = \frac{1}{2}M_n + P_n - P_{n-1} - \frac{1}{6}(M_n - M_{n-1}) \tag{6.30}$$

解得:

$$\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_{n-1} + 2M_n = 3[(P_1 - P_0) - (P_n - P_{n-1})] \triangleq g_n \tag{6.31}$$

于是得方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_n \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

7 其他插值问题[3]

7.1 Bézier 曲线

从以上的讨论可以看出, 插值问题的类型在于插值基函数的选择. 当选用Bernstein 基函数时, 问题就变成了Bézier 插值问题.

控制插值点的个数, 将多个插值点进行分段插值, 就形成了B样条插值. 对插值点加上权因子, 就形成了有理Bézier 插值, 这种曲线可克服, Bézier曲线无法准确表示二次曲线的问题.

有理Bézier曲线的形式为:

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}, \qquad t \in [0,1] \tag{7.1}$$

其中B_i^n 为Bernstein基函数, 他有$n+1$ 个控制点, 当$w_i = 1$ 时就是一般的n次Bézier曲线

Bernstein 基函数可以完全用直线来定义, 有良好的几何和代数性质.

目前应用最广泛的是三次B样条曲线.

7.2 二维插值问题

二维插值问题用于曲面的构造, 有弗格森（J. C. Ferguson）曲面, 即三次参数曲面

$$P(u,w) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{i,j} u^i w^j \tag{7.2}$$

为构造在边界上光顺的曲面, Coons提出了所谓超限插值（transfinite interpolation）的方法: 沿用Coons的符号, 将参数曲面片$P(u,w)$ 记作uw, 曲面片的四条边界曲线$P(0,w), P(1,w), P(u,0), P$ 记作$0w, 1w, u0, u1$, 混合函数$F_0(u)$ 记作F_0u; 边界曲线$u0$跨界切向量$\frac{\partial uw}{\partial w}\Big|_{w=0}$ 记作$u0_w$,

先构造一张曲面片以$0w, 1w$为边界, 并以$0wu, 1wu$为这两边界是的跨界斜率, 曲面片方程显然为:

$$uw = \begin{pmatrix} F_0u & F_1u & G_0u & G_1u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0w \\ 1w \\ 0w_u \\ 1w_u \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

同样构造以以$u0, u1$为边界, 并以$u0w, u1w$为这两边界是的跨界斜率, 曲面片方程显然为:

$$uw = \begin{pmatrix} u0 & u1 & u0_w & u1_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0w \\ F_1w \\ G_0w \\ G_1w \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

将两曲面叠加, 再减去多加的四个角点部分, 得到$P(u,w)$ 的表达式

$$
\begin{aligned}
uw = & \begin{pmatrix} F_0u & F_1u & G_0u & G_1u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0w \\ 1w \\ 0w_u \\ 1w_u \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} u0 & u1 & u0_w & u1_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0w \\ F_1w \\ G_0w \\ G_1w \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} F_0u & F_1u & G_0u & G_1u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 00 & 01 & 00_w & 01_w \\ 10 & 11 & 01_w & 11_w \\ 00_u & 01_u & 00_{uw} & 01_{uw} \\ 10_u & 11_u & 10_{uw} & 11_{uw} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0w \\ F_1w \\ G_0w \\ G_1w \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

混合函数可取Hermite 三次多项式或其他, 这是一种一般的曲面造型方法.

7.3 其他曲面造型

另外还有Bézir 曲面, 及有理Bézier曲面(NURBS曲面)
形式为:

$$
R(s,t) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} w_{ij} P_i B_i^m(s) B_j^n(t)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} w_{ij} B_i^m(s) B_j^n(t)} \tag{7.6}
$$

同样他有$(m+1)*(n+1)$个控制点, $w_{ij}=1$ 时为一般Bézier曲面
几何造型还有很多问题, 这里不再讨论.

7.4 几种插值方法的比较

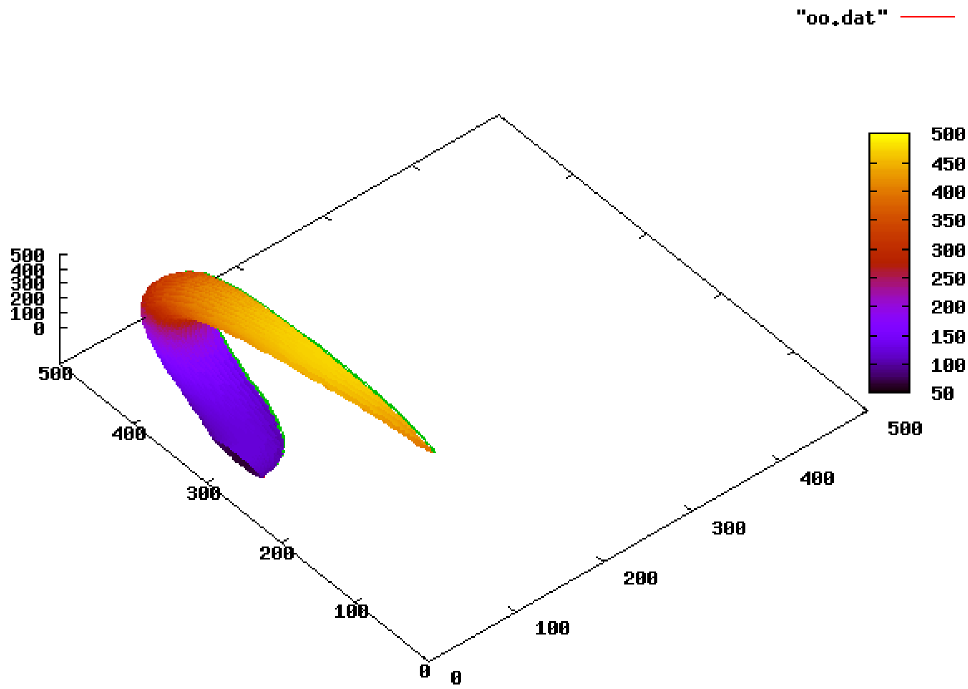
最为古老的插值方法是多项式插值, 有Lagrange 插值法和Newton 插值法, 两种方法本质上是一样的, 但Newton 插值的计算两比较小, 此外差商方法引出了很多其他应用, 如数值积分等. 但是多项式插值有很大的不稳定性Runger 现象多项式插值的优点之一是余项可以估计, 而三次样条的余项很难估计.

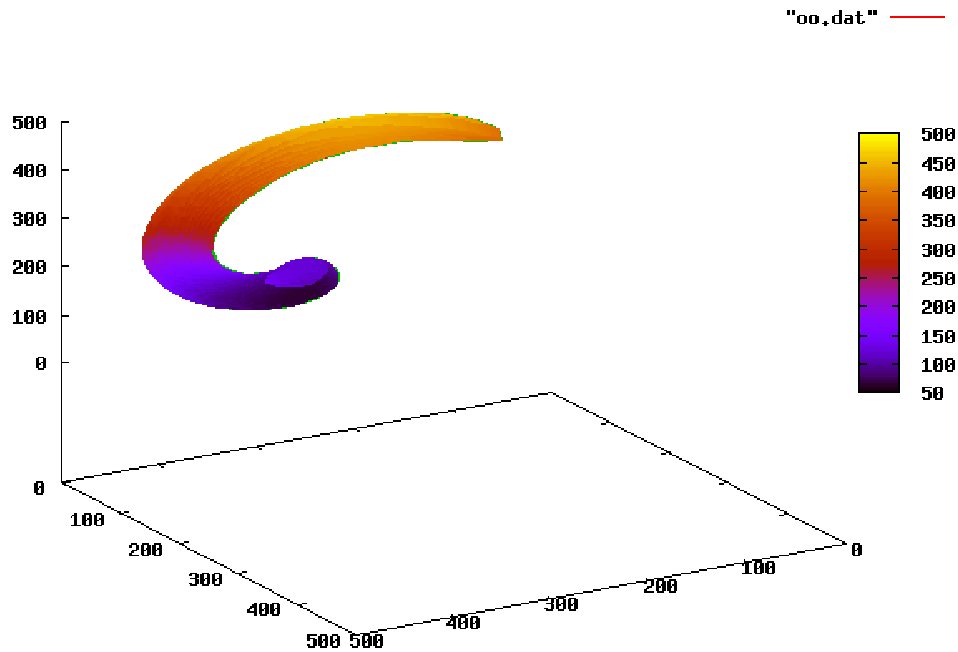
三次样条插值的优势是曲线更光顺, 计算量比较小.

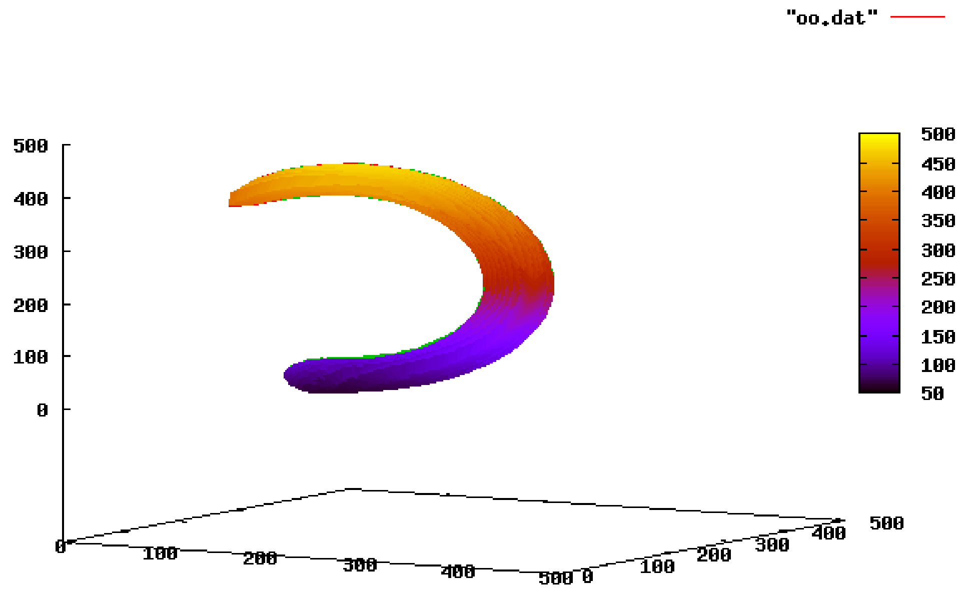
Bézier曲线发展起来的一套方法在几何造型中有广泛应用, 对几何造型方面的问题最好用Bézier曲线

8 2001年三维血管重构[2]

目前只处理了原始图像, 得到一个重构各截面得到的三维构构形


"oo.dat"
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
500
400
300
200
100
0
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500


"oo.dat"
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
500
400
300
200
100
0



参考文献

[1] 浙江大学出版社, 计算方法, 1989

[2] 2001年全国大学生建模竞赛A题, http://csiam.edu.cn/mcm/mcm01/AB01.doc，2001

[3] 唐荣锡《现代图形技术》第4章图形技术的数字革命http://www.cgn.net.cn/wsdj/z4.htm，2004